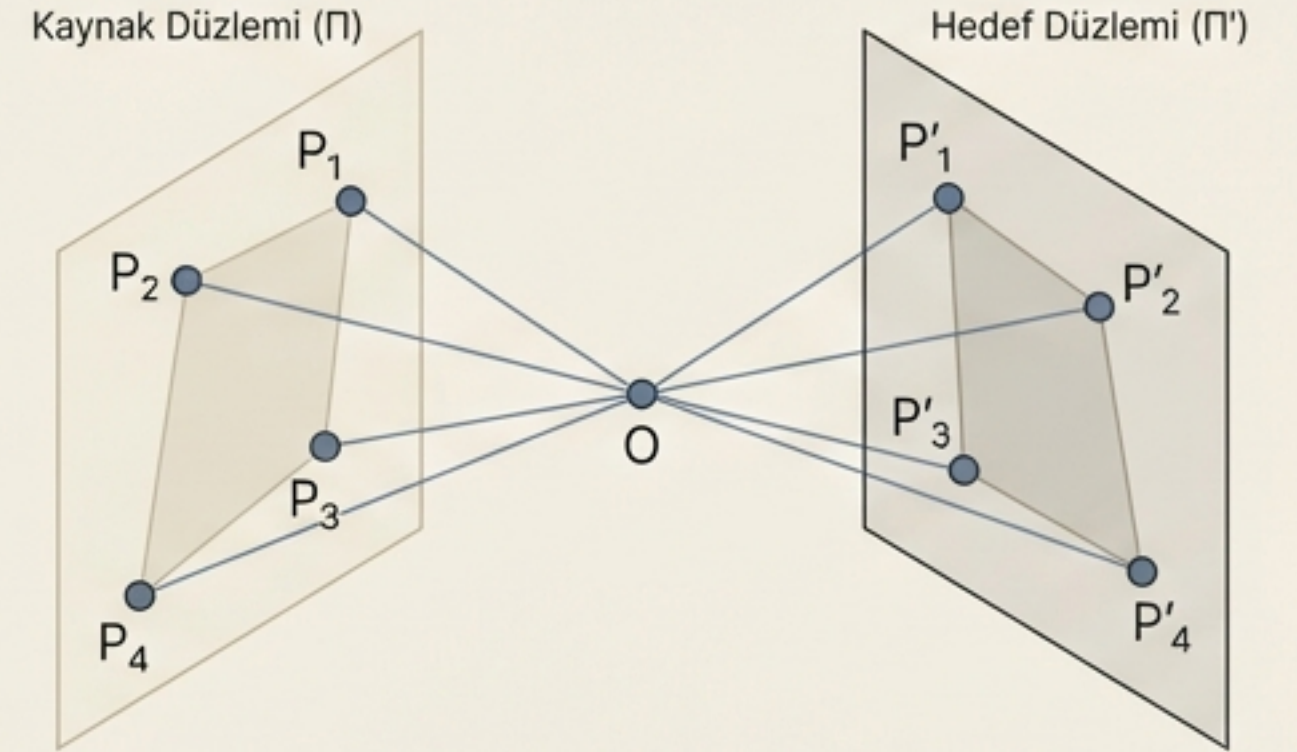


2B İzdüşümsel Dönüşümlerin Kestirimi

Hafta 4: Bilgisayarlı Görme



Kestirim Problemi ve Serbestlik Derecesi

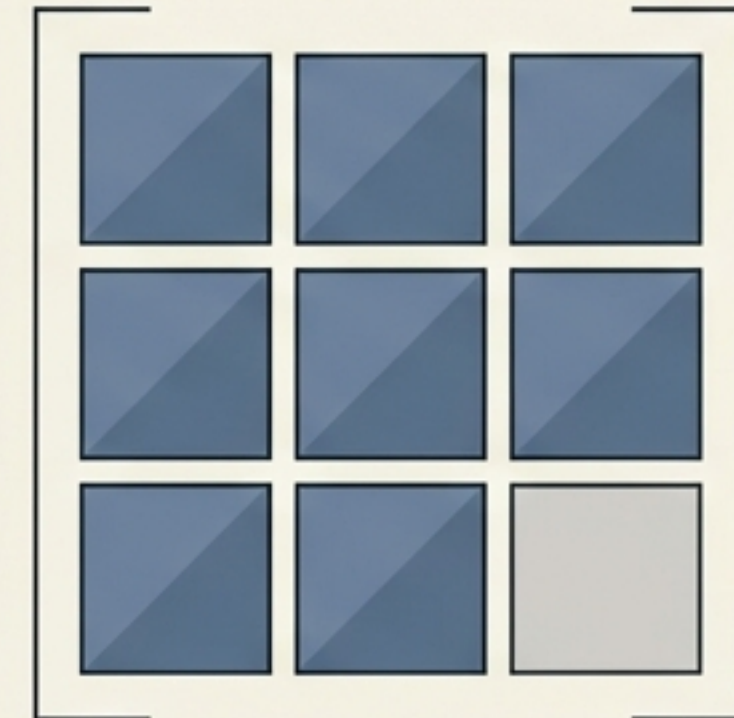
Hedef: İki görüntü arasındaki noktaları eşleyen 3x3 boyutundaki **H** matrisini (Homografi) bulmak.

Serbestlik Derecesi: **H** matrisi 9 elemana sahiptir ancak ölçek bağımsız olduğu için 8 serbestlik derecesine (8 DoF) sahiptir.

Altın Kural: Her bir nokta eşleşmesi 2 denklem sağlar. Bu nedenle, dönüşümü hesaplayabilmek için en az 4 noktaya ihtiyacımız vardır.

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{H} \mathbf{x}_i$$

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ w'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{pmatrix}$$



Doğrudan Doğrusal Dönüşüm (DLT) – Bölüm 1

- **Vektörel Çarpım (Cross Product):**
Bilinmeyen ölçek faktörünü iptal etmenin en zarif yolu.
- Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır:

$$\mathbf{x}'_i \times \mathbf{H}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

$\mathbf{H}$ matrisinin satırları $\mathbf{h}^{1T}, \mathbf{h}^{2T}, \mathbf{h}^{3T}$ ise:

$$\begin{pmatrix} y'_i \mathbf{h}^{3T} \mathbf{x}_i - w'_i \mathbf{h}^{2T} \mathbf{x}_i \\ w'_i \mathbf{h}^{1T} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i \mathbf{h}^{3T} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}'_i \mathbf{h}^{2T} \mathbf{x}_i - y'_i \mathbf{h}^{1T} \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilinmeyen ölçek faktörü
denklemden tamamen
çıkarıldı.

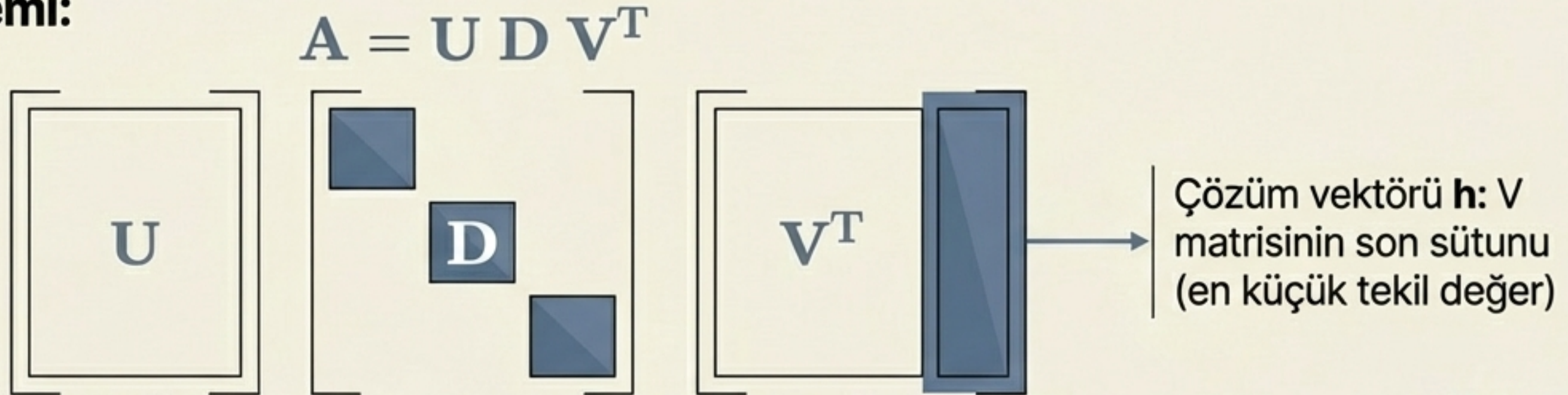
Doğrudan Doğrusal Dönüşüm (DLT) - Bölüm 2

Denklemleri, $\mathbf{H}$ matrisinin elemanlarından oluşan 9 boyutlu $\mathbf{h}$ vektörüne göre düzenlediğimizde $\mathbf{A}_i \mathbf{h} = \mathbf{0}$ sistemini elde ederiz.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0^T & -w'_i \mathbf{x}_i^T & y'_i \mathbf{x}_i^T \\ w'_i \mathbf{x}_i^T & 0^T & -x'_i \mathbf{x}_i^T \end{bmatrix}$$

Çözüm Yöntemi:

Tekil Değer
Ayrışımı
(SVD)



Gerçek Dünyaya Dönüş: Hata Kavramı

Cebirsel Mesafe

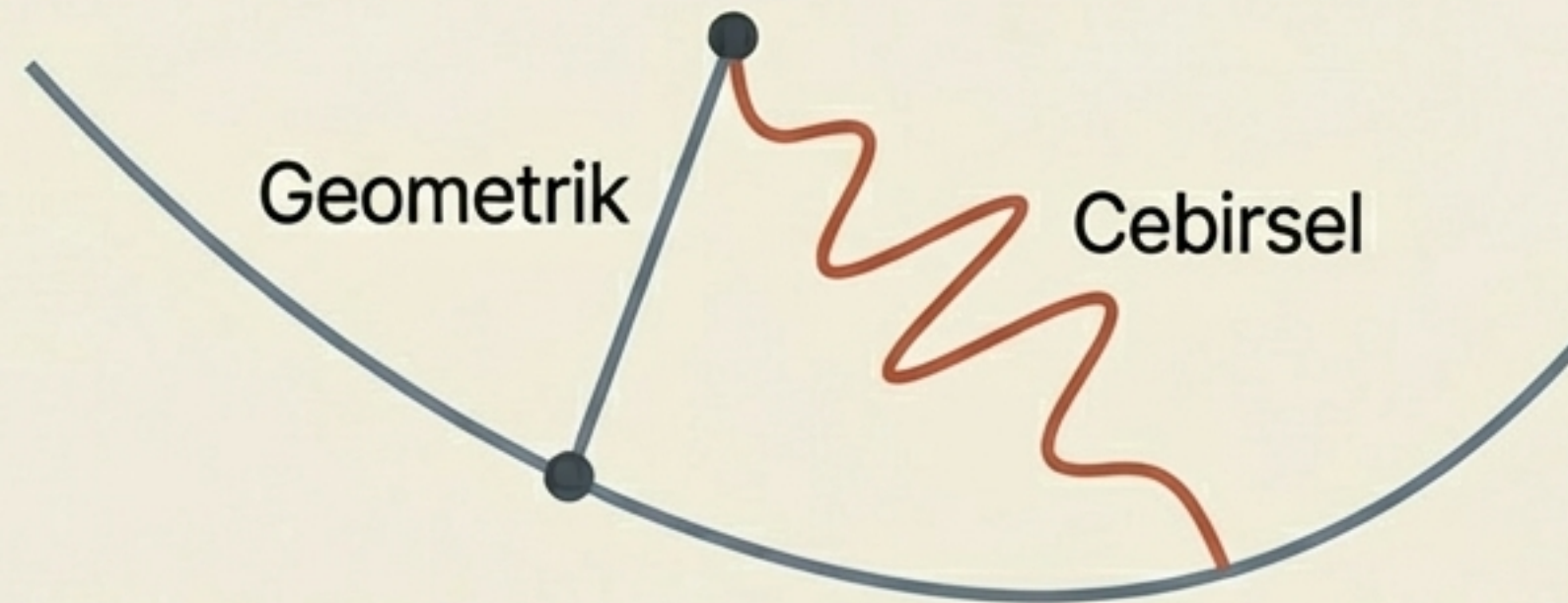
DLT algoritmasının minimize ettiği mesafedir. Hesaplanması kolaydır, ancak fiziksel bir anlamı yoktur.

$$d_{\text{alg}}(\mathbf{x}'_i, \mathbf{H}\mathbf{x}_i)^2 = \|\mathbf{A}_i \mathbf{h}\|^2$$

Geometrik Mesafe

Görüntü üzerindeki piksellerin gerçek fiziksel mesafesini ölçer. Sezgisel olarak beklenen en doğru sonuçtur.

$$\sum \left(d(x_i, \hat{x}_i)^2 + d(x'_i, \hat{x}'_i)^2 \right)$$

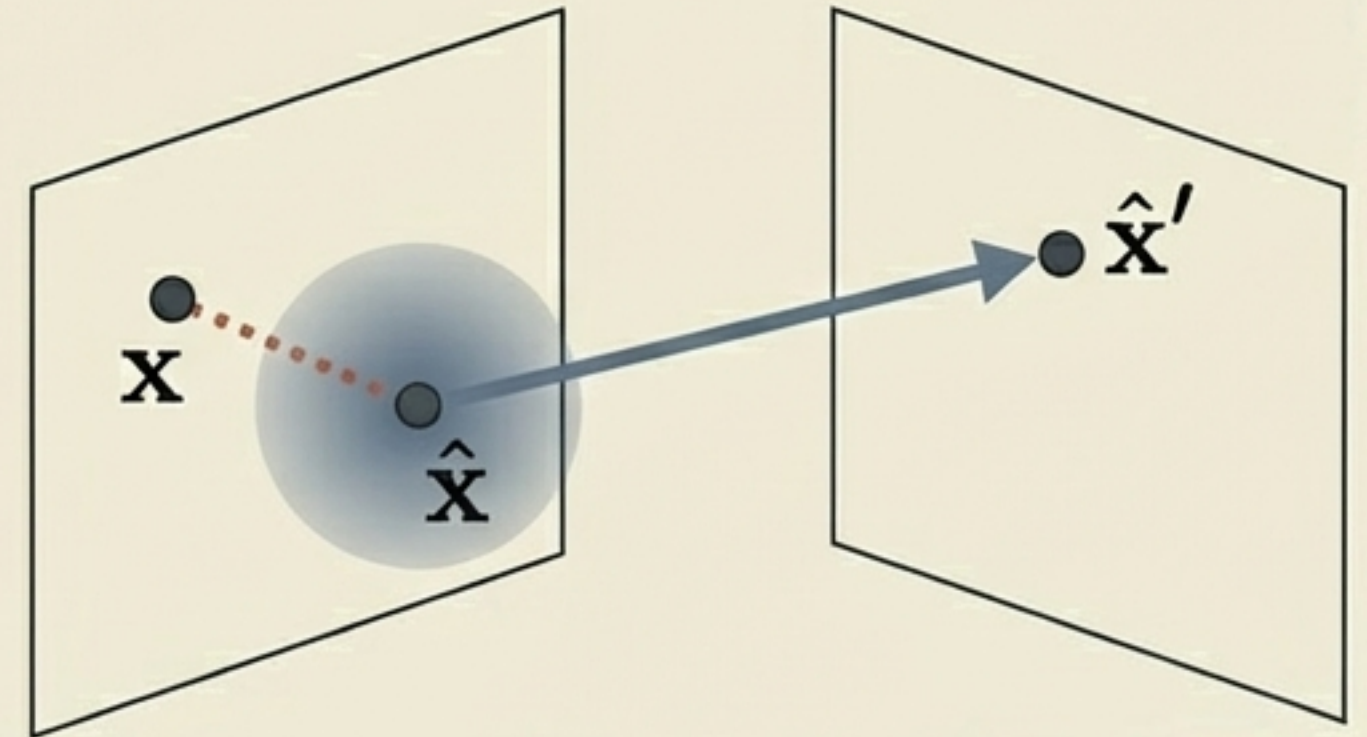


Yeniden İzdüşüm Hatası (Reprojection Error)

Maksimum Olabilirlik Kestirimi (MLE): Ölçüm hatalarının Gauss dağılımına uyduğu varsayımıyla, Yeniden İzdüşüm Hatasını minimize etmeliyiz.

Maliyet Fonksiyonu:
$$\sum_i d(x_i, \hat{x}_i)^2 + d(x'_i, \hat{x}'_i)^2$$

Zorluk: Sadece **H** matrisini değil, $2n+9$ parametrelili karmaşık bir optimizasyon gerektiren mükemmel yan değişkenleri ($\hat{x}_i$) de tahmin etmeliyiz.



Pragmatik Bir Orta Yol: Sampson Hatası

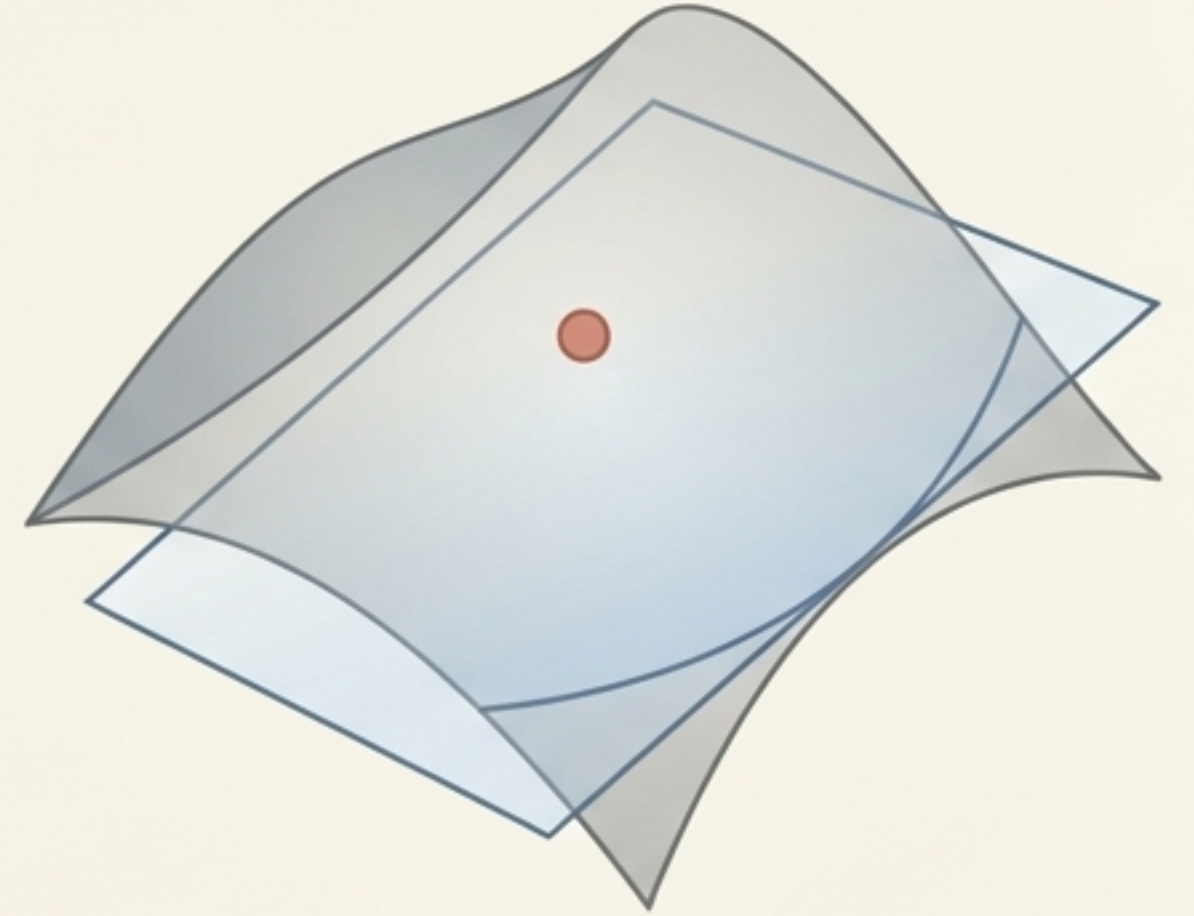
Yeniden izdüşüm hatasını minimize etmek çok maliyetlidir. Sampson hatası, geometrik hatanın birinci mertebeden Taylor yaklaşımıdır. Yan değişkenlere ihtiyaç duymaz.

$$\epsilon^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \epsilon$$

ϵ : Cebirsel hata vektörü (Ah)

$\mathbf{J}$: Kısmi türev matrisi (Jacobian)

Avantaj: Sadece 9 parametre üzerinden optimizasyon yapmamızı sağlayarak hızı ve doğruluğu birleştirir.



Sayısal Tuzak: DLT Pratikte Neden Başarısız Olur?

Modern kameralarda piksel koordinatları çok büyüktür (örn: (1000, 1000)). Bu durum, A matrisinin oluşturulmasında kritik bir kondisyon problemine yol açar.

Bir sütundaki değerler 1 civarındayken, diğer sütunlardaki değerler 10^6 seviyelerine çıkabilir.

SVD algoritması bu aşırı dengesiz matris üzerinde çalıştığında sayısal kararsızlık yaşar.

Çözüm İhtiyacı: Algoritmayı uygulamadan önce verilerin matematiksel olarak ehlileştirilmesi şarttır.



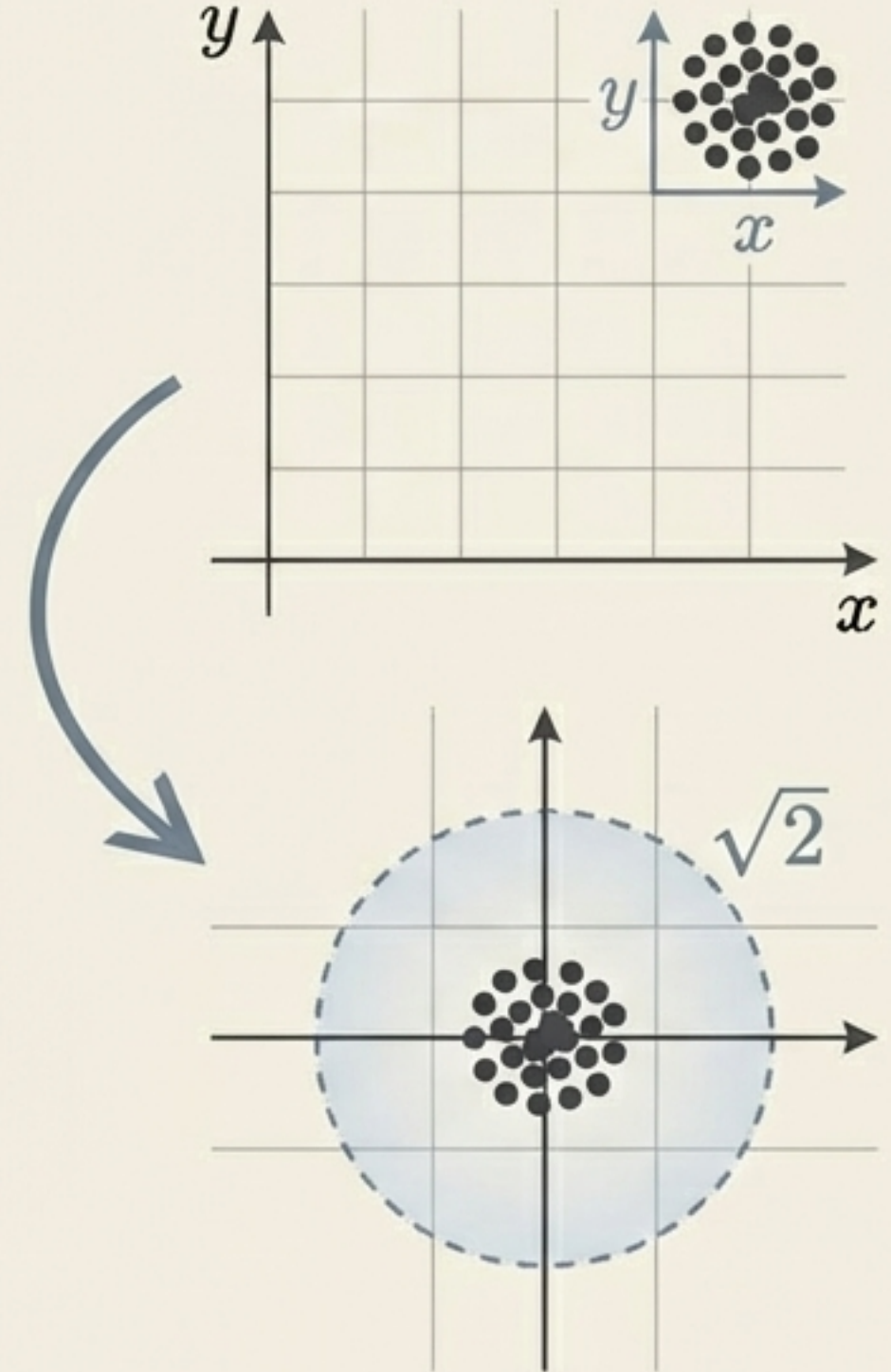
1.0	1,000,000	1,500,000
1.0	2,500,000	4,000,000
1.0	3,000,000	1,200,000

Zarif Çözüm: Veri Normalizasyonu (Normalized DLT)

Veri normalizasyonu opsiyonel bir iyileştirme değil, DLT algoritmasının zorunlu bir parçasıdır.

1. **Öteleme:** Noktaların ağırlık merkezini orijine (0,0) taşıyın.
2. **Ölçeklendirme:** Noktaların orijine olan ortalama uzaklığı $\sqrt{2}$ olacak şekilde ölçeklendirin.
3. **DLT:** Normalleştirilmiş noktalar üzerinde DLT uygulayarak $\tilde{H}$ matrisini bulun.
4. **Ters Dönüşüm:** Bulunan matrisi orijinal koordinat sistemine geri döndürün:

$$H = T'^{-1} \tilde{H} T$$

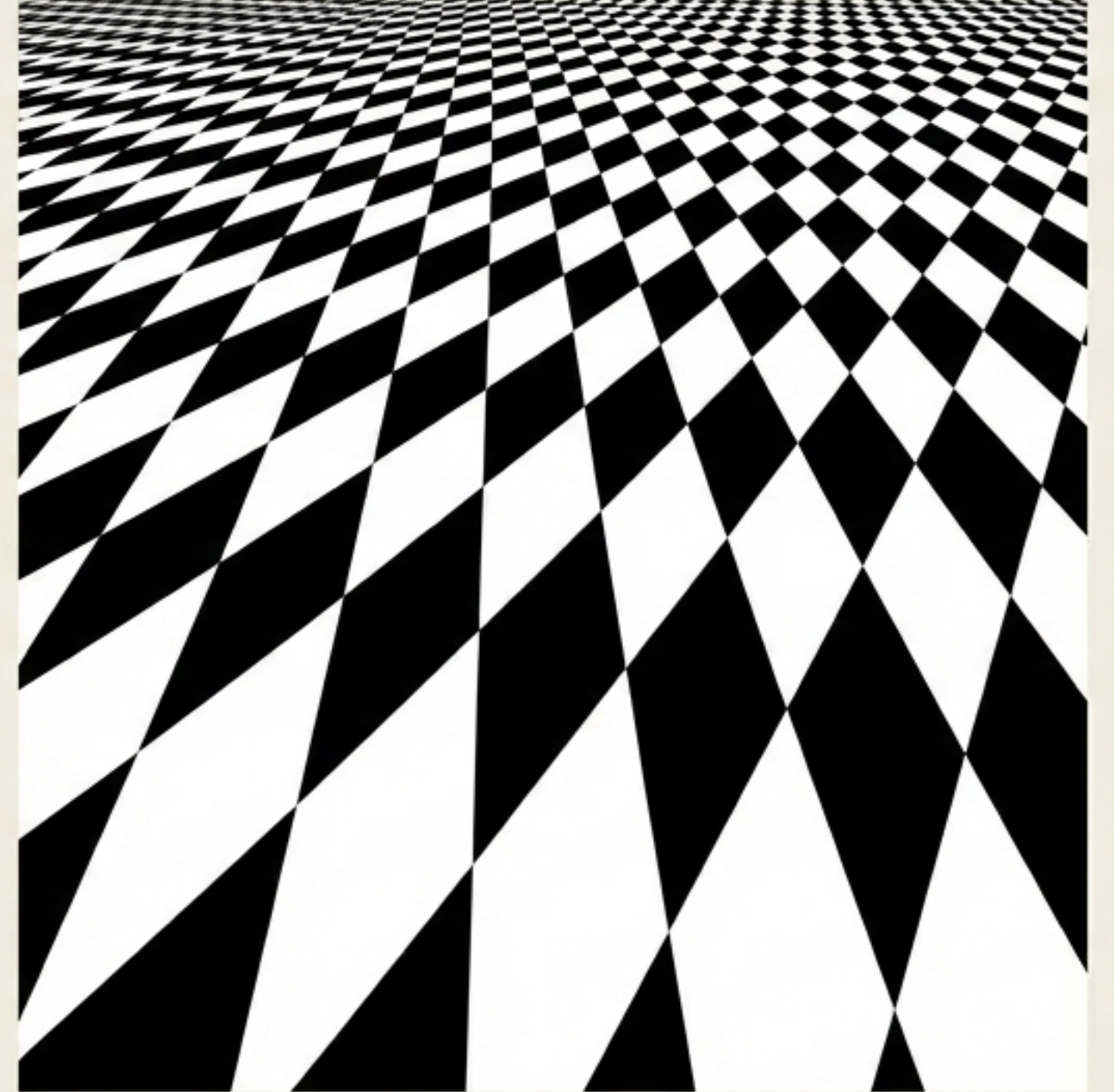


Mükemmellik Arayışı: İteratif Minimizasyon

Normalleştirilmiş DLT bize harika bir başlangıç noktası verir. Ancak Altın Standart (Gold Standard) algoritma, gerçek geometrik hatayı minimize etmelidir.

Levenberg-Marquardt Algoritması:

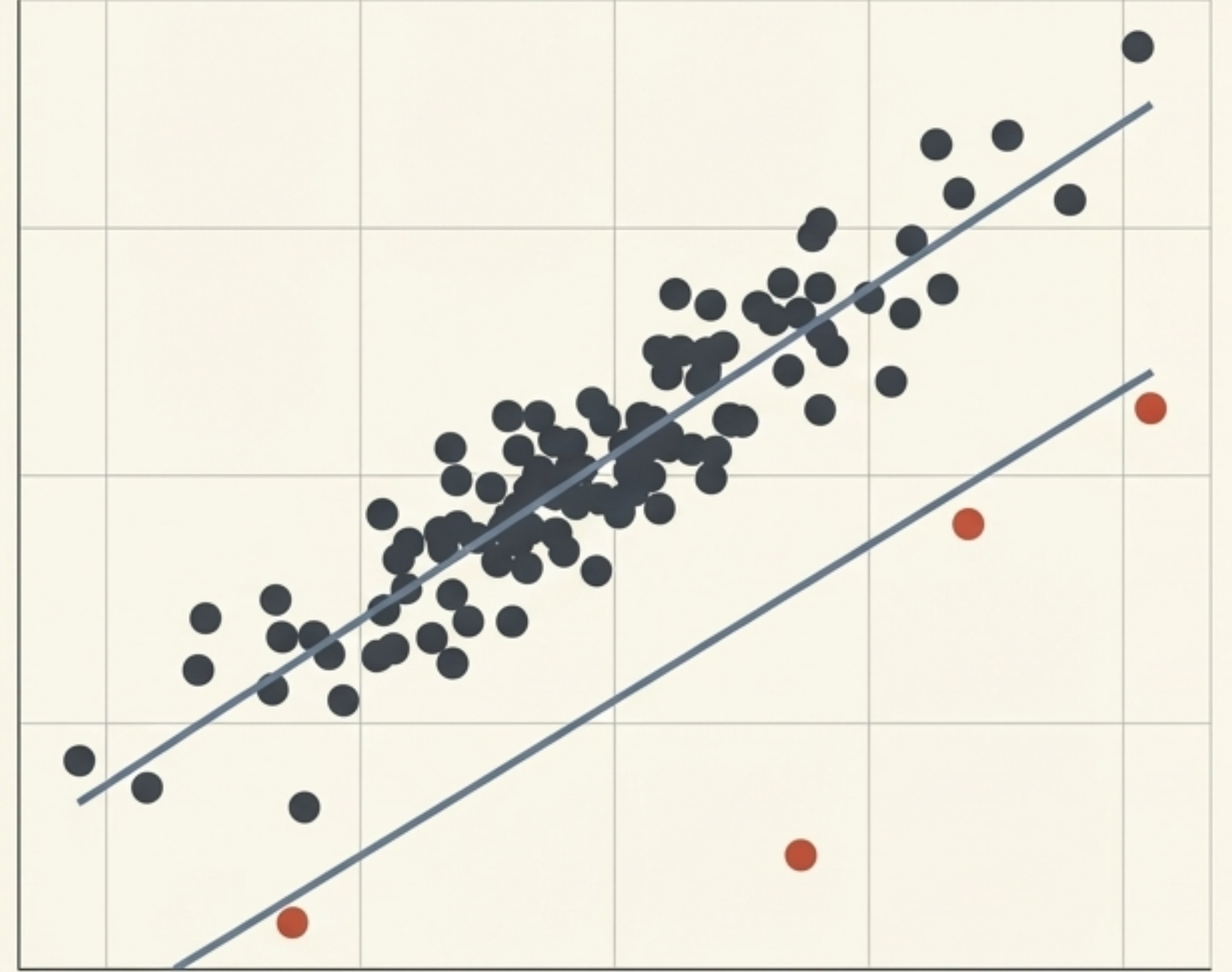
- Doğrusal olmayan bir en küçük kareler optimizasyon yöntemidir.
- Normalleştirilmiş DLT'den elde edilen H matrisini başlangıç değeri olarak kullanır.
- Geometrik hatayı yerel bir minimuma çekerek sonucu pürüzsüzleştirir.



Kaosla Yüzleşmek: Aykırı Değerler (Outliers)

Şimdiye kadar hataların sadece ufak piksel kaymaları (Gauss gürültüsü) olduğunu varsaydık. Peki ya özellik eşleştirici tamamen yanlış iki noktayı eşleştirirse?

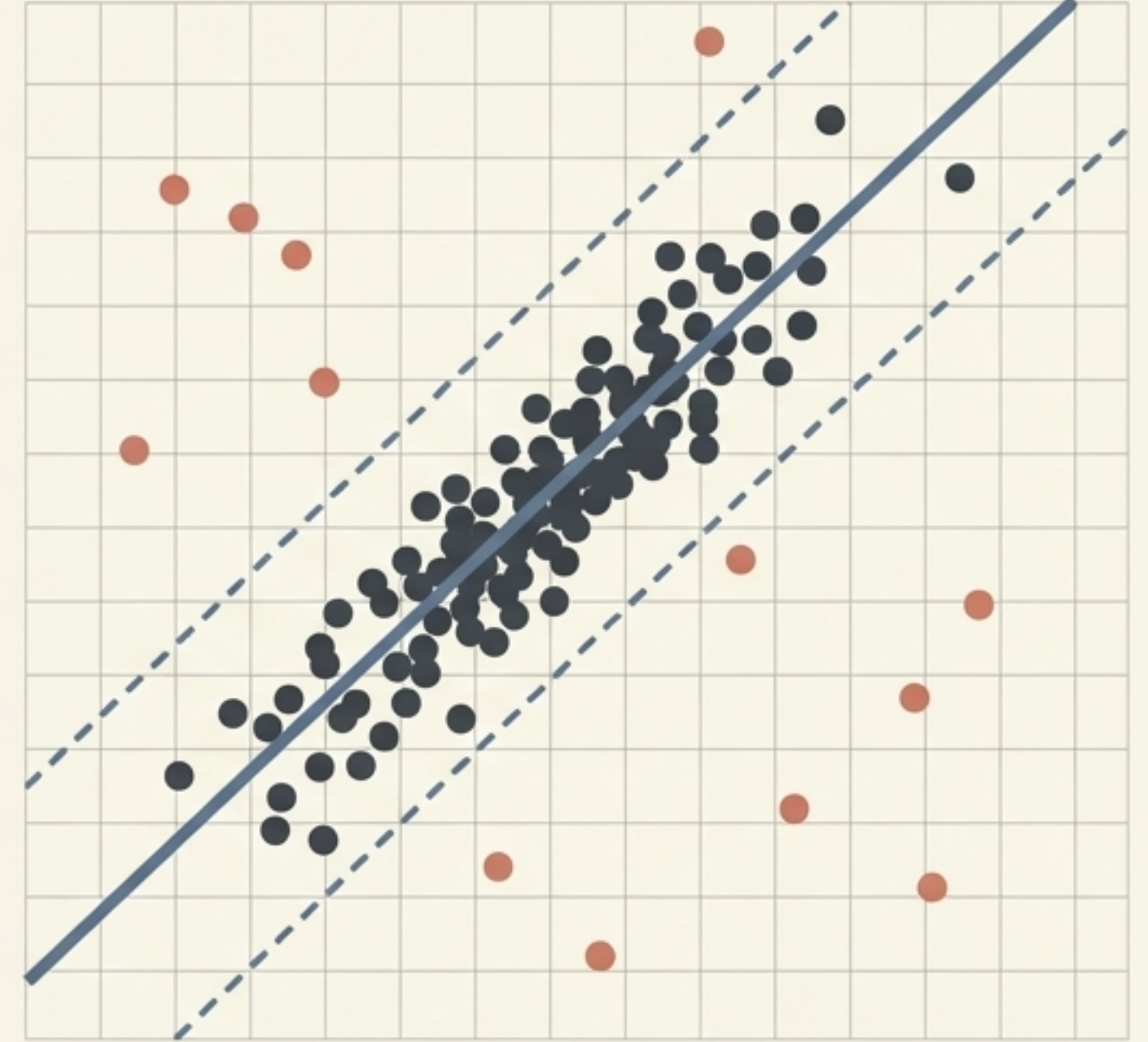
Sorun: En küçük kareler optimizasyonu aykırı değerlere karşı son derece kırılgandır. Tek bir yanlış eşleşme, tüm homografi matrisini bozabilir.



Kurtarıcı: RANSAC Algoritması (Robust Estimation)

RANSAC, tüm veriyi kullanmak yerine minimum veriyi kullanarak bir konsensüs inşa eder ve aykırı değerleri görmezden gelir.

1. Rastgele sadece 4 nokta seçin.
2. **DLT** kullanarak bir **H** matrisi hesaplayın.
3. Kalan noktaları bu modele göre test edin.
4. Hata eşiğinin altında kalanlara **İçsel Değer (Inlier)** deyin.
5. En büyük konsensüsü sağlayan modeli nihai doğru kabul edin.



Uyarlanabilir RANSAC: Ne Zaman Durmalıyız?

RANSAC'ı sonsuza kadar çalıştıramayız. Başarı olasılığını dinamik olarak hesaplayıp erken durma kararı alabiliriz.

$$N = \frac{\log(1 - p)}{\log(1 - (1 - \epsilon)^s)}$$

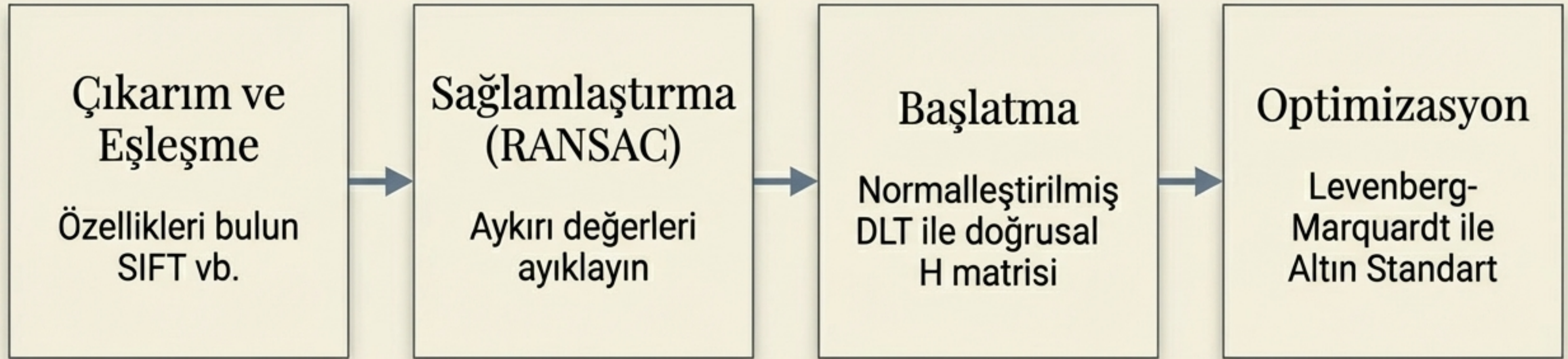
p: Başarı olasılığı
(örn. %99)

ε: Aykırı değerlerin (outliers)
tahmini oranı

s: Model için gereken nokta
sayısı (Homografi için s=4)

Sonuç: RANSAC çalıştıkça **ε** güncellenir ve **N** sayısı dinamik olarak **düşer**.

Sentez: Tam Algoritmik Boru Hattı



Sonuç: Tüm kriz senaryolarına (gürültü, sayısal kararsızlık, aykırı değerler) dirençli, otomatik bir kestirim sistemi.

Sonuç: Teoriden Pratiğe

Matematiksel İdealizm Yetersizdir: Doğrudan çözümler ($A_h=0$) teorik olarak kusursuzdur, ancak fiziksel gürültü ve sayısal hatalar karşısında çökerler.

Hata Uzayını Anlamak: Algoritmanın başarısı, kullandığı hata metriğine (Cebirsel vs. Geometrik/Sampson) doğrudan bağlıdır.

Gerçek Dünya Sağlam Araçlar İster: Veri normalizasyonu ve RANSAC gibi yöntemler, teorik kodları endüstri standartlarına dönüştüren görünmez kahramanlardır.

*Homografi kestirimi, bir denklem çözmekten çok daha fazlasıdır;
gürültü ve kaosun içinde uyumu bulma sanatıdır.*